Practica 3   Propagación de Incertidumbres

Medición indirecta. Incertidumbres en cantidades calculadas

En la práctica anterior nos hemos ocupado solamente del concepto de incertidumbre de una magnitud que medimos directamente. Sin embargo, generalmente el proceso de medición es *indirecto*, es decir, el resultado que deseamos es una combinación de dos o más magnitudes, o es por lo menos una función calculada a partir de una sola magnitud. Por ejemplo, supóngase que se quiere determinar el volumen de un cilindro midiendo su radio y su altura, o el volumen de una esfera midiendo su radio. Las incertidumbres asociadas con las magnitudes medidas directamente se propagan al resultado de la medida final. Nuestro objetivo ahora es mostrar cómo hallar la incertidumbre de magnitudes relacionadas con otras magnitudes medidas directamente a partir de las incertidumbres de estas últimas.

Supongamos primero que queremos saber el error de una magnitud $\boldsymbol{z}$ que es el producto de una constante por una magnitud que medimos $\boldsymbol{x}$, con su respectiva incertidumbre[1] δx . O sea, $z = Ax$ con A constante (un ejemplo de esto es la relación del perímetro del círculo p con su diámetro d de la forma $p = \pi d$). En este caso el error δz será

$$\delta z = A\delta x$$

Supongamos ahora que queremos medir una cierta magnitud **z** que depende de las magnitudes **x** e **y** (cuyas incertidumbres son δx y δy, respectivamente) de la forma $z = x + y$. Recordamos de cursos de laboratorio en secundaria que en este caso el error δz se puede calcular como

$$\delta z = \delta x + \delta y. \qquad [1]$$

Si la dependencia fuera de la forma **z**=**x-y**, el error sería también

$$\delta z = \delta x + \delta y\ . \qquad [2]$$

Supongamos ahora que queremos hallar el error del producto **z**=**xy.** En este caso el error lo podemos escribir como

$$\delta z = y\delta x + x\delta y. \qquad [3]$$

Si fuera, en cambio, $z = x/y$ el error sería

$$\delta z = \frac{1}{y}\delta x + \frac{x}{y^2}\delta y \qquad [4]$$

Notemos que estas relaciones tienen mucho que ver con las fórmulas de derivadas para las respectivas dependencias funcionales. Esto lo podemos ver escribiendo la dependencia $z = xy$ como caso particular en donde $x = y$. Supongamos entonces que $z = x^2$. Según la fórmula [3] el error δz será

$$\delta z = x\delta x + x\delta x = 2x\delta x.$$

---

1 A partir de ahora manejaremos indistintamente los términos “error” e “incertidumbre”.

Esta fórmula la podemos obtener hallando[2] $dz = d(x^2) = 2xdx$ O sea, las formulas [1], [2], [3] y [4] se deducen a partir de las derivadas ***parciales*** de $\boldsymbol{z}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

Ejemplos de propagación de errores

(a) Supongamos que deseamos medir el área A de un rectángulo a partir de las medidas directas de su largo ℓ y de su ancho a.

Según lo anterior, la incertidumbre absoluta en la medida del área, δA debido a las incertidumbres absolutas $\delta\ell$ y δa en las medidas del largo y del ancho respectivamente, será:

$$A = a\ell$$

$$\delta A = a\delta\ell + \ell\delta a$$

La incertidumbre relativa[3] en la medida del área será:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{a\delta\ell + \ell\delta a}{a\ell} = \frac{\delta\ell}{\ell} + \frac{\delta a}{a}$$

(b) Si deseamos medir el volumen de un cilindro realizando las medidas directas de su diámetro d y de su altura h, la incertidumbre absoluta en la medida del volumen será:

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$$

$$\delta V = \frac{\pi}{2} dh\, \delta d + \frac{\pi}{4} d^2\, \delta h$$

Donde δd y δh son las incertidumbres absolutas en las medidas del diámetro y la altura respectivamente.

(c) Supongamos que necesitamos hallar el volumen de un paralepípedo rectángulo cuyas dimensiones son: ℓ largo, a ancho, h altura. Para ello se procede a tomar cinco medidas para cada una de estas dimensiones, con una regla graduada hasta milímetros. Los datos están consignados en la siguiente tabla:

---

2 Notemos que $(x^2)' = \frac{d(x^2)}{dx}$. Por lo tanto, a grosso modo, podemos escribir $d(x^2) = (x^2)'dx = 2xdx$

3 Recordar que la incertidumbre relativa se calcula como incertidumbre absoluta dividido el valor de la magnitud.

Dimensión					
LARGO (cm)	9,23	9,25	9,22	9,30	9,18
ANCHO (cm)	4,32	4,38	4,35	4,35	4,34
ALTURA (cm)	6,54	6,50	6,48	6,52	6,46

Observe que nos hemos permitido tratar de "acertar" visualmente (siendo lo más cuidadosos posible) las décimas de milímetro que no las resuelve la regla (esto ya lo hemos justificado en la práctica anterior). Otros autores preferirán no hacer esto; es decir, no permitirán colocar la cifra dudosa. En nuestro caso reportaremos los siguientes resultados:

Dimensión	Media	Incertidumbre	Resultado
LARGO (cm)	9,24	0,03	9 24 ± 0,03
ANCHO (cm)	4,35	0,01	4,35 ± 0,01 ,
ALTURA (cm)	6,50	0,02	6,50 ± 0,02

De esta forma la incertidumbre absoluta en la medida del volumen del paralelepípedo será:

$$V = a\ell h$$

$$\delta V = ah\,\delta\ell + \ell h\,\delta a + \ell a\,\delta h$$

$$V = (261 \pm 2)cm^3$$

y el error relativo porcentual[4] E_{RP} será

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta\ell}{\ell} + \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta h}{h}$$

$$E_{RP} = \frac{\delta V}{V} \times 100 = 0{,}7\%$$

En los cálculos se ha tenido en cuenta el manejo de operaciones con cifras significativas. Además sólo hemos retenido una cifra significativa en la incertidumbre. En el caso de seguir con el criterio dado en clase, el de mantener dos cifras

4 Recordamos que el error porcentual se calcula como el error relativo por cien, o sea

$E_{RP} = E_{REL} \times 100$

significativas cuando se realiza una propagación de errores, el resultado final será:

$V = (261{,}3 \pm 2{,}3)\ cm^3$ y el E_{RP} un 0,8%

(d) Supongamos que una magnitud *z* se puede expresar en función de otras dos como $z = x - y$, de tal forma que la incertidumbre relativa sería

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x + \delta y}{x - y}$$

Podemos ver que, cuando *x* e y son muy cercanas, *x-y* será muy pequeña, la incertidumbre relativa puede adquirir valores muy grandes. Esto es, en el mejor caso, una situación insatisfactoria, y la precisión puede ser tan baja que anule el valor de la medición. Esa condición es en particular peligrosa, ya que puede pasar inadvertida. Es perfectamente obvio que nadie intentaría determinar la longitud de un cuaderno midiendo la distancia de cada borde a un punto alejado a un kilómetro para luego restar las dos longitudes. Sin embargo, puede suceder que el resultado deseado se obtenga por sustracción de dos medidas realizadas por separado (en dos termómetros, dos relojes,...), y el carácter de la medición como diferencia puede no ser claro. En consecuencia, todas las mediciones que tengan que ver con diferencias deberán tratarse con el mayor cuidado. Es claro que la forma de evitar esa dificultad es medir la diferencia de manera directa, en vez de obtenerla por sustracción de dos cantidades medidas. Por ejemplo, si uno tiene un aparato en el que dos puntos están a potenciales respecto a tierra de V_1 =1500 *voltios* y V_2= 1510 *voltios* y la cantidad que se requiere es V_2 - V_1, sólo un voltímetro de alta calidad permitiría medir los valores de V_2 y V_1 con la exactitud requerida para lograr incluso un 10% de precisión en V_2-V_1. Por otro lado, un voltímetro ordinario de 10 V, conectado entre los dos puntos para medir V_2-V_1 directamente, daría de inmediato el resultado deseado, con un 2 o 3% de precisión.

Es necesario advertir que para poder usar la expresión [5] en el cálculo de propagación de incertidumbres es necesario que se den las siguientes dos condiciones:

1) El error de cada variable es mucho menor que la propia variable.

2) Las variables son independientes en el siguiente sentido: el valor de una de ellas no afecta en absoluto al valor de la otra. Por ejemplo, la estatura de una persona y su peso no son variables independientes. Si medimos el peso y la estatura de un gran número de personas llegaremos a la conclusión de que *generalmente* las personas más altas pesan también más. Esto no es fácil de detectar en muchos casos y omitirlo nos lleva a resultados erróneos.

Fórmula general para propagar errores

En forma general, se puede demostrar que si la magnitud a medir $z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es una función de varias variables, la incertidumbre absoluta δz en su medida, debida a las medidas de las magnitudes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, será:

$$\delta z = \sum_{i=1}^{i=n} \left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| \delta x_i \qquad [5]$$

Donde $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ es la derivada parcial de **z** respecto de x_i y los δx_i son las respectivas incertidumbres absolutas de las magnitudes x_i. (En realidad, la forma correcta de escribir el error en **z** sería

$$(\delta z)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 (\delta x_i)^2$$

durante el curso utilizaremos la expresión [5] por simplicidad en los cálculos.)

Más ejemplos

e) Supongamos el caso que medimos un cierto ángulo $\theta = 32°$, con un semicírculo de apreciación 1º, si tomamos la apreciación como el error en el ángulo veremos como se propaga el error al $\sin\theta$ y $\cos\theta$.

Nuestra función $z = \sin\theta$ depende únicamente de θ de modo que la sumatoria en [5] se reduce a un único término

$$\delta z = \delta(\sin\theta) = \left|\frac{\partial z}{\partial\theta}\right| \delta\theta = \left|\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial\theta}\right| \delta\theta$$

Donde $\delta\theta$ se refiere al error en el ángulo. Recordando $(\sin\theta)' = \cos\theta\,\delta\theta$

$$\delta z = \left|\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial\theta}\right| \delta\theta = \cos\theta\,\delta\theta \qquad [6]$$

Para poder resolver esta clase de situaciones debemos evaluar correctamente el error en el ángulo, es decir tanto el error en el ángulo como el ángulo deben ser trabajos en radianes, para tener coherencia en las unidades utilizadas al determinar el error en la función trigonométrica dependiente del ángulo en cuestión.

Prosigamos con el ejemplo anterior, debemos pasar 32º a radianes y luego calcular el error en el haciendo uso de [6].

Verifique que el resultado correcto es $\sin\theta \pm \delta(\sin\theta) = (0.530 \pm 0.015)\,rad$

Ejercicios para el lector:

1) Se quiere hallar el área de un círculo (con su respectiva incertidumbre absoluta y relativa) cuyo radio es r=(7,5±0,1) cm. Recordar que el área de un círculo se puede hallar como $A = \pi r^2$
2) Las aristas de un cubo son de a = (4,50±0,05) cm, b = (8,50±0,09) cm y c = (3,50±0,03) cm. Determinar el volumen del cubo con su incertidumbre absoluta y relativa.
3) La diferencia de potencial entre dos placas paralelas es de V = (9,52±0,02) v y su separación es de d = (12,0±0,1)cm. Suponiendo que la longitud de las placas es mucho mayor que la separación de las mismas, ¿cuánto vale el campo eléctrico medio entre ellas? (Recordar que el campo eléctrico E entre dos placas infinitas paralelas separadas por una distancia d con una

diferencia de potencial V es$E = V/d$).

4) Un péndulo simple se usa para medir la aceleración de la gravedad, usando la expresión: $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. El período T medido fue de (1,24±0,02) seg y la longitud l de (0,381±0,002)m. ¿Cuál es valor resultante de la gravedad con su incertidumbre absoluta y relativa?

5) La distancia focal de una lente delgada se va a medir usando la relación $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$ en donde: d_o es la distancia objeto =(0,154±0,002) *m y* $d_i$es la distancia imagen = (0,382±0,002) *m.* ¿Cuál es el valor calculado de la distancia focal, su incertidumbre absoluta y su incertidumbre relativa?

6) 6) Una rejilla de difracción se usa para medir la longitud de onda de un haz de luz, usando la ecuación $d\sin\theta = \lambda$. El valor medido de θ es de 13° 34'±2'. Suponiendo que el valor de *d* es 1420 $\times 10^{-9}$ *m* y que se puede ignorar su incertidumbre. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta y relativa en el valor de λ?

7) Si se mide un ángulo de 67º con un semicírculo de apreciación 0.5º, si se toma como error en el ángulo la apreciación del instrumento, cual seria el error en z si definimos:

   a) $z = \cos\theta$

   b) $z = \tan\theta$

Anexo

Propagación de incertidumbres con carácter estadístico

Supongamos que deseamos medir una magnitud física a través de la medida de otras. En el caso de que la recolección de datos para obtener las respectivas medidas justifique un análisis estadístico, es decir que las desviaciones estándar sean confiables, la mejor opción para calcular la desviación estándar de la medida buscada se debe hacer como se indica a continuación.

Sea una magnitud $z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que depende de las magnitudes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ las respectivas desviaciones estándar en las medidas de las magnitudes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La desviación estándar σ_z para la medida de la magnitud *z* será:

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 (\sigma_i)^2}$$

[6]

Otra convención utilizada para expresar la desviación estándar σ_z (que es la que utilizaremos nosotros y es consistente con la ecuación [5]) sería:

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^{i=n} \left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| \sigma_i$$

[7]

Ejemplos de σ_z expresados según la última convención mencionada:

$$z = x + y \Rightarrow \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y$$

$$z = x \cdot y \Rightarrow \sigma_z = y\,\sigma_x + x\,\sigma_y$$

$$z = x^a \cdot y^b \Rightarrow \frac{\sigma_z}{z} = a\frac{\sigma_x}{x} + b\frac{\sigma_y}{y}$$